§11. Интегрирование тригонометрических функций.

11.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида: $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx}$
(R- рациональная функция)

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональной функции заменой переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$ - универсальная тригонометрическая подстановка.

Основываясь на формулах тригонометрии, имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(9+8\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \end{array}\right| =\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{9+9t^2+8-8t^2+2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{\left(t^2+2t+1\right)-1+17}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+4^2}=2\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4}+C=\underline{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{4}+C}$$

11.2. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x dx \quad ; \quad \int \cos^n x dx}$

Находят с использованием рекуррентных (возвращающихся) формул:

$$\boxed{\int \sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx-\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x}$$

$$\boxed{\int \cos^n x\cdot dx=\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\cdot dx+\frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1}x}$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{4-1}{4}\int \sin^{4-2} x dx - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^{4-1} x = \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^3 x =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\int \sin^0 x \cdot dx - \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x\right) - \frac{1}{4}\cos x \cdot \sin^3 x = \underline{\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x \cdot \cos x + C}$$

11.3. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx}$, где

n и **m**- целые числа, причем **одно** из них **нечетное**.

Интегралы берутся с помощью формул:

1. $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$
2. $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$
3. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
4. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Пример.

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \cdot d(\cos x) - \int \cos^8 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= \underline{-\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c}$$

11.4. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx}$,где

n и **m** – целые числа, но **оба четные**

Применяются формулы понижения степени:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}};\qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}};$$

$$\boxed{\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x}$$

Пример.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c =$$

$$= \underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\cdot \sin 4x + c}$$

11.5. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^n x dx}$,где

n и **m** – целые числа, но **отрицательные.**

Используется подстановка: $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Выведем формулы для $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; dx

1. $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ $\quad \boxed{\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}}$

2. $\sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}}$$

3. $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x - \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{t'dt}{1+t^2}$ $\quad \boxed{dx = \dfrac{dt}{1+t^2}}$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 16\cos^2 x}.$$

Пусть: $\left| \begin{array}{ll} \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & t = \operatorname{tg} x \end{array} \right|$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t)^2 \left(\dfrac{t^2}{1+t^2} + 6 \cdot \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 16 \cdot \dfrac{1}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t^2 + 6t + 9) - 9 - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + C =$$

$$= \underline{\frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C}$$

При помощи этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$.

11.6. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin nx \cdot \cos mx dx}$; $\boxed{\int \cos nx \cdot \cos mx dx}$; $\boxed{\int \sin nx \cdot \sin mx dx}$.

При интегрировании функций такого вида используются следующие формулы:

1. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$
3. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

Пример.

$$\int\sin x\cdot\sin 11x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(x-11x)-\cos(x+11x)\right)dx=\frac{1}{2}\int(\cos 10x-\cos 12x)\,dx=$$

$$=\underline{\frac{1}{20}\sin 10x-\frac{1}{24}\sin 12x+C}$$

11.7. Интегралы вида: $\boxed{\int\operatorname{tg}^n x\cdot\sec^{2m}x\,dx}$,где

n и **m** - **целые** числа

При решении используются формулы:

1. $\sec^2 x\,dx=d(\operatorname{tg}x)$
2. $\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-d(\operatorname{ctg}x)$
3. $1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$
4. $1+\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$

Пример.

$$\int\operatorname{tg}^3 x\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}x\,dx=\int\operatorname{tg}x\left(\sec^2 x-1\right)dx=\int\operatorname{tg}x\cdot\sec^2 x\,dx-\int\operatorname{tg}x\,dx=$$

$$=\int\operatorname{tg}x\,d(\operatorname{tg}x)-\int\operatorname{tg}x\,dx=\underline{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C}$$

11.8. Интегралы вида: $\boxed{\int \operatorname{tg}^{2m-1} x \cdot \sec^m x dx}$

Используются формулы:

1. $\sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = d(\sec x)$
2. $\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -d(\operatorname{cosec} x)$
3. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
4. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

§12. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

12.1. Тригонометрические подстановки.

1) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx}$ применяется подстановка:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad ; \quad dx = a \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad ; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

2) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx}$ $\Rightarrow$

$$x = a \cdot \sin t \quad ; \quad dx = a\cos t dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad ; \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

3) $\boxed{\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}$

$$x = a\cdot\sec t \quad ; \quad dx = a\sec t\cdot \operatorname{tg} t\cdot d\cdot t \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sec t \quad ; \quad t = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$$

Замечание: эти подстановки не единственные. В случае (1) можно было обозначить $x = a\cdot\operatorname{ctg} t$; во (2) - $x = a\cdot\cos t$

Примеры.

1)

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \left|\begin{array}{l} x = 2\operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\end{array}\right| = \int\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}tdt\cdot\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^2 t}} = \int\frac{dt\cdot\cancel{\cos t}}{\sin t\cdot\cos\cancel{{}^2} t\cdot 2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sin t\cdot\cancel{\cos t}\cdot\cancel{\sec t}} = \frac{1}{2}\int co\sec t\cdot dt = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{2}\right| + C$$

2)

$$\int x^2\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos t dt\\ t=\arcsin\frac{x}{3}\end{matrix}\right|=\int 9\sin^2 t\cdot\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=81\int\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{81}{4}\int 4\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=\frac{81}{4}\int\sin^2 2t dt=\frac{81}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{81}{8}\int dt-\frac{81}{8}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4t d(4t)=\frac{81}{8}t-\frac{81}{32}\sin 4t+C=$$

$$=\underline{\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}--\frac{81}{32}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{3}\right)+C}$$

3)

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-16}\,dx=\left|\begin{matrix}x=4\sec t\\ dx=4\sec t\cdot\mathrm{tg}\,t\cdot dt\\ t=arc\sec\frac{x}{4}\end{matrix}\right|=\int 4\sec t\cdot\sqrt{16\sec^2 t-16}\cdot 4\sec t\cdot\mathrm{tg}\,t\cdot dt=$$

$$=64\int\sec^2 t\cdot\mathrm{tg}^2\,t dt=64\int\mathrm{tg}^2\,t d(\mathrm{tg}\,t)=64\frac{\mathrm{tg}^3\,t}{3}+C=\underline{\frac{64}{3}\cdot\mathrm{tg}^3\left(arc\sec\frac{x}{4}\right)+C}$$

12.2. Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного и того же аргумента.

$\boxed{\int R\left(x; x^{\alpha}; x^{\beta}; \ldots x^{\gamma}\right)dx}$, где α, β, γ - рациональные дроби

Такие интегралы берутся подстановкой:

$\boxed{\begin{array}{l} x = t^{n} \quad ; \quad t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \end{array}}$, где **n** - наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^{2}} - \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^{6}} \cdot 6t^{5}dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^{6}}} = 6\int \frac{t^{2} \cdot t^{5}dt}{t^{4} - t^{3}} = 6\int \frac{t^{7}dt}{t^{3}\left(t-1\right)} = 6\int \frac{t^{4}dt}{t-1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{3}; \quad \beta = \frac{2}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$n = 6$$

$$x = t^{6}$$

$$dx = 6t^{5}dt$$

$$t = \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{array}{rl|l} - & t^{4} & t-1 \\ & \underline{t^{4} - t^{3}} & \overline{t^{3} + t^{2} + t + 1} \\ - & t^{3} & \\ & \underline{t^{3} - t^{2}} & \\ - & t^{2} & \\ & \underline{t^{2} - t} & \\ - & t & \\ & \underline{t - 1} & \\ & 1 & \end{array}$$

$$= 6\int\left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 2\cdot\sqrt[6]{x^3} + 3\cdot\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}\right| + C =$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C}$$

12.3. Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейных функций аргумента.

$$\boxed{\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right)dx}$$

Используется подстановка:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^n \quad ; \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' dx = n\cdot t^{n-1}\cdot dt \quad ;$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ ,$$

где **n**- наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$n = 6$$

$$x+2 = t^6$$

$$dx = 6t^5dt$$

$$t = \sqrt[6]{x+2}$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t+1 \\ \cline{2-2} -\underline{(t^3+t^2)} & t^2-t+1 \\ -t^2 & \\ -\underline{(-t^2-t)} & \\ t & \\ -\underline{(t+1)} & \\ -1 & \end{array}$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - kn|t+1|\right) + C =$$

$$= 2\sqrt[6]{(x+2)^3} - 3\sqrt[6]{(x+2)^2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}+1\right| + C$$

§13. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.

$$\boxed{\int R\left(a^x\right)dx} \quad ; \quad \boxed{\int R\left(e^x\right)dx}$$

Интегралы такого вида берутся подстановкой:

$\boxed{a^x = t}$; прологарифмируем

$$\ln a^x = \ln t$$
$$x \cdot \ln a = \ln t$$

$$\boxed{x = \frac{\ln t}{\ln a}} \quad ; \quad \boxed{dx = \frac{dt}{t \cdot \ln a}}$$

Пример
$$\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \int \frac{\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t} \cdot \ln 3 (1+t^2)} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot arctgt + C =$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^x = t \\ x = \dfrac{\ln t}{\ln 3} \\ dx = \dfrac{dt}{t \cdot \ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} 3^x + C$$

§14 Заключительные замечания

1. **Нахождение неопределенного интеграла основывается на сведении его к табличному.**

   Существует специальный справочник по неопределенному интегралу.

2. **Если интеграл найден различными способами форма ответов будет разной, но как ранее было доказано, эти ответы отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.**

Например

$$\int \frac{Sinxdx}{Cos^3x} = -\int Cos^{-3}xd\left(Cosx\right) = -\frac{Cos^2x}{-2} + C = \frac{1}{2Cos^2x} + C_1$$

$$\int \frac{Sinxdx}{Cos^3x} = \int \frac{Sinx}{Cosx} \cdot \frac{1}{Cos^2x} \cdot dx = \int \operatorname{tg} x \cdot Sec^2xdx = \int \operatorname{tg} xd\left(\operatorname{tg} x\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

Итак

$$F_1\left(x\right) = \frac{1}{2Cos^2x} + C_1$$, а $$F_2\left(x\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

$$F_1\left(x\right) - F_2\left(x\right) = \frac{1}{Cos^2x} + C_1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2 = \frac{1}{Cos^2x} + C_1 - \frac{1Sin^2x}{2Cos^2x} - C_2 =$$

$$= \frac{1 - Sin^2x}{2Cos^2x} + C_1 - C_2 =$$

$$= \frac{Cos^2x}{2Cos^2x} + C_1 - C_2 = \frac{1}{2} + C_1 - C_2 = C$$

3. Изложенные методы интегрирования не всегда позволяют находить неопределенный интеграл. Такие интегралы называются неберущимися и их можно вычислить только приближенными методами.

$\int \frac{Sinx}{x} dx$ - интегральный синус

$\int \frac{Cosx}{x} dx$ - интегральный косинус

$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - интеграл Пуассона и т.д.